

Teoremi di struttura per divisori su superfici K3

Emiliano Ambrosi

9 agosto 2015

1 Richiami generali sulla teoria delle superfici e sulle K3

In questa sezione richiamiamo alcuni teoremi e osservazioni generali sulle superfici che ci serviranno in seguito e le specializzeremo al caso di una superficie K3.

Per tutto l'articolo useremo la lettera X per denotare una superficie complessa proiettiva e liscia, D e C per indicare rispettivamente un divisore o una curva su di essa e useremo K_S per indicare il divisore canonico di una curva o una superficie S . Inoltre se F è un fascio, indicheremo con $\chi(F)$ la somma a segni alterni delle dimensioni dei suoi gruppi di coomologia.

Iniziamo ricordando la definizione di superficie K3.

Definizione 1. X è una K3 se K_X è il fibrato banale e $h^1(\mathcal{O}_S) = 0$.

Osservazione 1. In particolare, per la dualità di Hodge, $h^0(K_X) = 0$ e quindi su una K3 non ci sono forme differenziali olomorfe non nulle.

Teorema 1 (Riemann Roch per superfici). $\chi(D) = \chi(\mathcal{O}_X) + \frac{1}{2}D(D - K_X)$

Osservazione 2. Su una K3 abbiamo che, grazie alle ipotesi e alla dualità di Serre, che $\chi(\mathcal{O}_X) = h^0(\mathcal{O}_X) - h^1(\mathcal{O}_X) + h^2(\mathcal{O}_X) = 1 + h^1(-\mathcal{O}_X) = 2$ e quindi la formula precedente si legge $\chi(D) = h^0(D) - h^1(D) + h^0(-D) = 2 + \frac{1}{2}D^2$. In particolare D^2 è pari.

Teorema 2 (Formula del genere). Se $C \subseteq X$ è liscia e irriducibile allora $2g(C) - 2 = C(C + K_X)$

Osservazione 3. Su una K3 la precedente diventa $2g(C) - 2 = C^2$. In particolare per $C^2 \geq -2$ e, poichè C^2 è pari $C^2 < 0$ se e solo se $C^2 = -2$ se e solo $C \simeq \mathbb{P}^1$. Una curva siffatta verrà chiamata una (-2) curva.

Teorema 3 (Primo teorema di Bertini). Se $f : X \rightarrow Y$ è un morfismo di varietà complesse proiettive suriettivo, allora la fibra generica del morfismo è irriducibile.

Dimostrazione. Vedere il Teorema 2.26 a pagina 139 di Shafarevich, Basic Algebraic Geometry Vol 1 dove viene dimostrato in una forma ben più generale. $\square$

Teorema 4 (Secondo teorema di Bertini). *Il generico elemento di $|D|$ è liscio al di fuori di del base locus.*

Proposizione 5 (Corollario del teorema dell'indice di Hodge). *Siano L, D due divisori su X con $L^2 > 0$. Allora $(DL)^2 \geq L^2 D^2$ e vale l'uguaglianza se e solo se $aD \equiv bL$ per certi $a, b \in \mathbb{Z}$*

Ricordiamo ora due fatti, del tutto generali, molto utili nello studio dei sistemi lineari su una superficie.

Proposizione 6. *Se $h^0(D) \geq 0$ allora $|D| = |M| + F$ dove $|M|$ è la parte mobile del sistema lineare e quindi è nef, F è la parte fissata e $H^0(D) = H^0(M)$.*

Proposizione 7. *Se $D \geq 0$ e $CD < 0$ allora $C^2 < 0$, C è una componente di D ed è nella parte fissata di $|D|$.*

Possiamo ora iniziare a dimostrare un primo semplice teorema per divisori su una $K3$.

Da adesso fino alla fine dell'articolo X indicherà una superficie $K3$

Teorema 8. *Se D è effettivo allora $D = M - F$, dove F è una somma di (-2) curve e M è effettivo, nef, $M^2 \geq D^2$ e $H^0(D) = H^0(M)$.*

Dimostrazione. Se D non è nef allora esiste una curva C tale che $DC < 0$. Per le osservazioni precedenti abbiamo $C^2 < 0$ e quindi C è una (-2) curva. Inoltre C è una componente di D e sta nella parte fissata di $|D|$. Di conseguenza se poniamo $D_1 = D - C$ abbiamo che D_1 è effettivo e $H^0(D_1) = H^0(D)$ (in quanto C è nella parte fissata da $|D|$). Inoltre, dato che $DC < 0$, $D_1^2 = D^2 + C^2 - 2DC = D^2 - 2 - 2DC \geq D^2$ e quindi $D_1^2 \geq D^2$. Se D_1 è nef abbiamo concluso. Se D_1 non è nef possiamo ripetere questo ragionamento con D^1 al posto di D per arrivare, in un numero finito di passi, alla tesi. $\square$

2 Struttura dei divisori positivi, nef e con autointersezione nulla

Iniziamo ora con un teorema di struttura per un tipo particolare di divisori, che risulterà essere molto utile in seguito.

Teorema 9. *Sia $D > 0$, nef e tale che $D^2 = 0$. Allora $D = aE$ dove $a = h^0(D) - 1$ e $|E|$ è un pencil di curve ellittiche senza punti base.*

Dimostrazione.

- Step 1. D non ha punti base.

Dato che D è strettamente positivo $h^0(-D) = 0$ e quindi Riemann-Roch ci dice che $h^0(D) \geq 2$. In particolare D è in un sistema lineare non banale. Possiamo quindi scrivere $|D| = |M| + F$, dove M è la parte mobile, che sarà quindi positiva e nef, e F è la parte fissa. Vogliamo mostrare che $F = 0$, per farlo ci basta mostrare che $F^2 = 0$. Infatti se per assurdo fosse $F \neq 0$ e $F^2 = 0$ Riemann-Roch ci direbbe che, dato che $F \geq 0$, $h^0(F) \geq 2$ il che è assurdo in quanto F è la parte fissata del sistema lineare e quindi $h^0(F) \leq 1$. Per mostrare che $F^2 = 0$ iniziamo notando che

$0 = D^2 = D(M + F) = DM + DF$ implica $DM = DF = 0$, in quanto sia DM che DF sono maggiori o uguali a zero, dato che D è nef e F e M sono positivi. Quindi abbiamo che $0 = DM = (M + F)M = M^2 + MF$ e di conseguenza, ragionando come prima, che $M^2 = MF = 0$. La tesi adesso è immediata in quanto $D^2 = (M + F)^2 = M^2 + 2MF + F^2 = F^2$. Quindi D è mobile. Per dimostrare che non punti base prendiamo due elementi distinti di $|D|$, D_1 e D_2 e mostriamo che $D_1 \cap D_2 = \emptyset$. Ma $D_1 D_2 = D^2 = 0$ e la tesi segue.

- Step 2. D definisce un morfismo $X \rightarrow \mathbb{P}^1 \subseteq \mathbb{P}^a$.
Per il punto precedente D definisce un morfismo $\varphi_D : X \rightarrow \mathbb{P}^a$. L'immagine di X tramite questo morfismo deve essere una curva. Infatti non può essere un punto (altrimenti $h^0(D) \leq 1$) e nemmeno una superficie, in quanto altrimenti dovrebbe avere grado 0 (D è a retrorimmagine di una sezione iperpiana di $\varphi_D(X)$ e di conseguenza D^2 è l'intersezione di due sezioni iperpiane di D , cioè dell'intersezione di $\varphi_D(X)$ con una retta, cioè il grado di $\varphi_D(X)$ che è strettamente positivo). Di conseguenza fattorizza tramite una curva C , possibilmente singolare $\varphi_D : X \rightarrow C \subseteq \mathbb{P}^a$. Ora possiamo prendere la fattorizzazione di Stein della mappa e trovare una curva liscia $\tilde{C}$ tale che la mappa si scriva come $\varphi_D = \psi \circ \pi$ dove $\pi : X \rightarrow \tilde{C}$ è un morfismo la cui fibra generica è connessa e $\psi : \tilde{C} \rightarrow C$ è un morfismo finito. Osserviamo che $\tilde{C}$ deve essere isomorfa a $\mathbb{P}^1$, in quanto altrimenti avrebbe una forma differenziale olomorfa non nulla il cui pullback tramite π sarebbe una 1-forma differenziale olomorfa non nulla su X il che è assurdo, in quanto X è una $K3$. In particolare la mappa ψ è definita da un divisore positivo su X , a volte un punto, e quindi è, a meno di automorfismi di $\mathbb{P}^a$ l'embedding di Veronese. Di conseguenza π definisce un isomorfismo tra C e $\tilde{C}$.
- Step 3 Conclusione della dimostrazione. Sappiamo che $D = \varphi_D^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^a}(1)) = \pi^* \circ \psi^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^a}(1)) = \pi^*(a\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)) = a\pi^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1))$. Ora sappiamo che $\pi^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1))$ è un pencil senza punti base (in quanto definisce un morfismo verso $\mathbb{P}^1$) e inoltre sappiamo che corrisponde alla generica fibra di π . Usando i due teoremi di Bertini, sappiamo che la generica fibra di π è una curva irriducibile e liscia, e di conseguenza otteniamo $D = aE$ dove E è una curva liscia irriducibile tale che $|E|$ è un pencil. Ci rimane da dimostrare che E è una curva ellittica, ma questo è immediato dalla formula del genere, in quanto $E^2 = 0$ e quindi $g(E) = 1$.

□

3 D nef e big $\Rightarrow H^1(D) = 0$

In questa sezione dimostreremo che su una $K3$, D nef e big $\Rightarrow H^1(D) = 0$, che oltre a essere un risultato ausiliario per il teorema di struttura della prossima sezione, rappresenta un prototipo per una generalizzazione del koidara vanishing theorem. Infatti in generale si può dimostrare che se D è effettivo, nef e $D^2 > 0$, e X una superficie qualsiasi, allora $H^1(K_X + D) = 0$. Si vede come questa è una generalizzazione del koidara vanishing theorem, che sostituisce l'ipotesi di ampio, con l'ipotesi di effettivo, nef e $D^2 > 0$. Nel nostro caso lo

dimosteremo per una superficie $K3$ anche se la dimostrazione, come si vedrà, usa solo l'annullarsi dell' $h^1(\mathcal{O}_X)$ e il fatto che un divisore nef e big su una $K3$ è linearmente equivalente ad un divisore effettivo. Iniziamo con un lemma valido su ogni superficie.

Lemma 1. *Sia D effettivo e $D_1, D_2 > 0$ tali che $D = D_1 + D_2$. Allora la successione $0 \rightarrow \mathcal{O}_X(-D_1) \otimes \mathcal{O}_{D_2} \rightarrow \mathcal{O}_D \rightarrow \mathcal{O}_{D_1} \rightarrow 0$ è esatta.*

Dimostrazione. □

Teorema 10. *Sia D nef e tale che $D^2 > 0$. Allora $h^1(D) = 0$*

Dimostrazione.

- Step 1. Riduzione al caso D effettivo.

Dobbiamo mostrare che esiste un divisore effettivo linearmente equivalente a D e per farlo è sufficiente dimostrare che $h^0(D) \neq 0$. Riemann Roch per le $K3$ ci dice che $h^0(D) + h^0(-D) > 2$ e quindi che o D o $-D$ è linearmente equivalente ad un divisore effettivo. Se per assurdo fosse $-D$ linearmente equivalente ad un divisore effettivo avremmo che $-DD \geq 0$ in quanto D è nef, ma questo è assurdo in quanto $D^2 > 0$ e quindi $-DD = -D^2 < 0$.

- Step 2. Se $D = D_1 + D_2$ con $D_1, D_2 > 0$ allora $D_1 D_2 \geq 1$

Dato che D è nef e big, sappiamo che $D_1^2 + D_1 D_2 = DD_1 \geq 0$ e $D_2^2 + D_1 D_2 = DD_2 \geq 0$. Supponiamo per assurdo che $D_1 D_2 \leq 0$, allora abbiamo che $D_1^2 \geq -D_1 D_2 \geq 0$ e $D_2^2 \geq -D_1 D_2 \geq 0$ e almeno una delle due disuguaglianze è stretta, altrimenti $D^2 = (D_1 + D_2)^2 = D_1^2 + D_2^2 + 2D_1 D_2 = 2D_1 D_2 \leq 0$. Supponiamo quindi $D_1^2 > 0$. Usando uno dei teoremi richiamati all'inizio abbiamo che $(D_1 D_2)^2 \geq D_1^2 D_2^2$ ma per le disuguaglianze precedenti ci dicono che $D_1^2 D_2^2 \geq (-D_1 D_2)(-D_1 D_2) = (D_1 D_2)^2$ e di conseguenza $(D_1 D_2)^2 = D_1^2 D_2^2$. Per lo stesso teorema possiamo scrivere $aD_1 \equiv bD_2$. Dato che D_1 e D_2 sono effettivi, moltiplicando per D l'uguaglianza precedente si ha che $ab \geq 0$ e quindi $a^2 D_1^2 = (aD_1)(aD_1) = abD_1 D_2 \leq 0$ che è assurdo in quanto avevamo supposto $D_1^2 > 0$.

- Step 3 $H^0(D) = 1$

Consideriamo una componente C di D tale che $h^0(C) = 1$, ad esempio una curva irriducibile. Abbiamo che $D = D - C + C$ e quindi, per il punto precedente $(D - C)C \geq 1$. Esiste quindi una componente Γ di $D - C$ tale che $\Gamma C \geq 1$. Se consideriamo la sequenza esatta lunga indotta dalla sequenza esatta corta del lemma precedente con $D_1 = \Gamma$ e $D_2 = C$ troviamo $0 \rightarrow H^0(\mathcal{O}_X(-C)) \otimes H^0(\Gamma) \rightarrow H^0(\mathcal{O}_{C+\Gamma}) \rightarrow H^0(\mathcal{O}_{D_1})$. Il primo termine è nullo in quanto $H^0(\mathcal{O}_X(-C)) = 0$ e il terzo ha dimensione 1 per ipotesi. D'altro canto $h^0(\mathcal{O}_{C+\Gamma}) \geq 1$ (ci sono almeno le funzioni costanti e di conseguenza $h^0(\Gamma + C) = 1$). Ripetendo questo ragionamento induttivamente aggiungendo una componente di D con $h^0(D) = 1$ alla volta otteniamo la tesi.

- Step 4 $H^1(D) = 0$

Prendendo la sequenza esatta fondamentale di D troviamo la successione esatta lunga $0 \rightarrow H^0(\mathcal{O}_X(-D)) \rightarrow H^0(\mathcal{O}_X) \rightarrow H^0(\mathcal{O}_D) \rightarrow H^1(\mathcal{O}_X(-D)) \rightarrow H^1(\mathcal{O}_X)$. Dato che l'ultimo termine è nullo per ipotesi, abbiamo che

la mappa $H^0(\mathcal{O}_D) \rightarrow H^1(\mathcal{O}_X(-D))$ è suriettiva e il suo nucleo è l'immagine di $H^0(\mathcal{O}_X) \rightarrow H^0(\mathcal{O}_D)$. Ma, per quanto mostrato nel punto precedente, entrambi sono spazi vettoriali unidimensionali e dato che $H^0(\mathcal{O}_X(-D)) = 0$ la mappa è iniettiva e quindi suriettiva. In particolare la mappa $H^0(\mathcal{O}_D) \rightarrow H^1(\mathcal{O}_X(-D))$ è la mappa nulla ed suriettiva, forzando $H^1(\mathcal{O}_X(-D)) = 0$ ad essere nullo. D'altro canto, per la dualità di Serre e tenuto conto che il fibrato canonico è banale, $h^1(\mathcal{O}_X(D)) = h^1(\mathcal{O}_X(-D)) = 0$ e la tesi segue.

□

In realtà dalla dimostrazione si vede che abbiamo dimostato qualcosa in più.

Corollario 11. *Sia D effettivo e tale che, ogni volta che $D = D_1 + D_2$ con $D_1, D_2 > 0$ allora $D_1 D_2 \geq 1$. Allora $h^1(D) = 0$.*

Un corollario immediato dell'ultimo teorema e della formula di Riemann-Roch per $K3$ è il seguente

Corollario 12. *Sia D nef e tale che $D^2 > 0$. Allora $h^0(D) = 2 + \frac{1}{2}D^2$.*

4 Struttura dei divisori nef con autointersezione positiva

Arriviamo finalmente al teorema di struttura per i divisori nef con autointersezione positiva.

Teorema 13. *Sia D nef e tale che $D^2 > 0$. Allora o $|D|$ non ha parte fissa, o $D = aE + \Gamma$ dove $a = h^0(D) - 1, |E|$ è un pencil di curve ellittiche senza punti base con $E^2 = 0$ e Γ è una (-2) curva con $E\Gamma = 1$*

Dimostrazione. Dato che $h^0(D) = 2 + \frac{1}{2}D^2 \geq 3$ possiamo assumere D effettivo e scrivere $|D| = |M| + F$ con $|M|$ la parte mobile e $|F|$ la parte fissata. Osserviamo che anche M è effettivo, nef e $H^0(M) = H^0(D)$. Distinguiamo due casi.

1. $M^2 > 0 \Rightarrow D$ non ha parte fissa

Per il corollario precedente $2 + \frac{1}{2}D^2 = h^0(D) = h^0(M) = 2 + \frac{1}{2}M^2$ e quindi $M^2 = D^2$. D'altro canto $\bar{D}^2 = D(F + M) = DF + DM \geq DM = (M + F)M = M^2 + FM \geq M^2$ dove le disuguaglianze valgono in quanto M, D sono effettivi e nef, e F è effettivo. Ora dato che $M^2 = D^2$ tutte le disuguaglianze sono ugualianze e quindi si trova subito che $FM = 0$. D'altro canto $M^2 = D^2 = (M + F)^2 = M^2 + F^2 + 2MF = M^2 + F^2$ e quindi anche $F^2 = 0$. Ancora come prima, se $F \neq 0$ allora $h^0(F) \geq 2$ il che è assurdo in quanto F è la parte fissa.

2. $M^2 = 0 \Rightarrow D = aE + \Gamma$

Abbiamo $M^2 = 0$, M nef ed effettivo e quindi, per il secondo teorema dimostrato, possiamo scrivere $M = aE$ dove $a = h^0(M) - 1 = h^0(D) - 1, |E|$ è un pencil di curve ellittiche senza punti base con $E^2 = 0$. Osserviamo che $a \geq 2$ in quanto $h^0(D) \geq 3$ e scriviamo $D = aE + F$.

- Step 1. $EF = 1$ Si ha che $a+1 = h^0(D) = 2 + \frac{1}{2}D^2 = 2 + \frac{1}{2}(aE+F)^2 = 2 + \frac{1}{2}(aEF + F^2) + \frac{1}{2}aEF \geq 2 + \frac{1}{2}aEF$ dove l'ultimo passaggio è giustificato dal fatto che $(aEF + F^2) = F(aE + F) = FD \geq 0$ in quanto D è nef e F effettivo. Ora $a + 1 \geq 2 + \frac{1}{2}aEF$ implica che $EF < 2$ e d'altro canto $EF \geq 0$. Se per assurdo fosse $EF = 0$, dalle ugualianze precedenti avremmo che $2 + \frac{1}{2}D^2 = 2 + \frac{1}{2}F^2$, quindi che $F^2 = D^2 \geq 2$ il che è assurdo in quanto F è la parte fissa. Quindi $EF = 1$
- Step 2. $D = aE + \Gamma$ Per il punto precedente abbiamo che esiste un'unica componente irriducibile Γ di F tale che $\Gamma E = 1$, quindi possiamo scrivere $F = F' + \Gamma$ con $F'E = 0$ e anche $D = aE + \Gamma + F'$. Vogliamo mostrare che $F' = 0$. Inoltre se dimostriamo che $D' = aE + \Gamma$ è nef, $D'^2 > 0$ abbiamo scritto $D = D' + F$ e il ragionamento del punto $M^2 > 0$ ci dà la tesi. Ma $\Gamma^2 \geq -2$ e quindi $D'^2 = (aE + \Gamma)^2 = 2aE\Gamma + \Gamma^2 = 2a + \Gamma^2 \geq 2a - 2 \geq 1 > 0$. Inoltre è chiaro che Γ' è una curva diversa da Γ , allora $\Gamma'D' = a\Gamma'E + \Gamma'\Gamma \geq 0$ mentre $\Gamma D' = a\Gamma'E + \Gamma\Gamma \geq a - 2 \geq 0$ e quindi D' è anche nef. Possiamo quindi concludere che $F' = 0$.
- Step 3. Γ è una (-2) curva.
Questo è quasi immediato in quanto da $2 + \frac{1}{2}D^2 = h^0(D) = a + 1$ segue che $2a - 2 = D^2 = (aE + \Gamma)^2 = 2aE\Gamma + \Gamma^2 = 2a + \Gamma$ cioè $\Gamma^2 = -2$

□

5 Un esempio

L'esempio tipico di superficie $K3$ è una quartica liscia in $\mathbb{P}^3$. Sia quindi X una quadrica liscia in $\mathbb{P}^3$. Dalla formula di aggiunzione sappiamo che il suo fibrato canonico è la restrizione del fibrato $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(4-4)$, cioè è il fibrato banale. Inoltre la sequenza esatta lunga in coomologia indotta dalla successione che definisce X , $0 \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-4) \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3} \rightarrow \mathcal{O}_X \rightarrow 0$, si legge $H^1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}) \rightarrow H^1(\mathcal{O}_X) \rightarrow H^2(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3})(-4)$. Il primo termine sappiamo che è nullo, mentre il terzo, per la dualità di Serre è isomorfo a $H^1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3})(4-4) = H^1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}) = 0$. Di conseguenza X è una $K3$.

Prendiamo ora una X particolare, che contiene una retta, prendiamo ad esempio X , la superficie definita da $x_0^4 - x_1^4 + x_2^4 - x_3^4 = 0$. Vediamo subito che questa contiene innumerevoli rette. Infatti, ad esempio, abbiamo 4 rette, l_i , su X che si intersecano in un punto, definite da $x_0 = x_1$ e $x_2 = \xi_i x_3$ dove le ξ_i sono le quattro radici distinte di $x^4 = 1$. Sono tutte (-2) curve, e si intersecano in $(1 : 1 : 0 : 0)$. Anche senza fare i conti per vederlo osserviamo che il divisore ampio H , dato dall'intesezione della quadrica con un piano di $\mathbb{P}^3$, si scrive come $l_1 + l_2 + l_3 + l_4$ e sappiamo che $4 = H^2 = (l_1 + l_2 + l_3 + l_4)^2 = -8 + 2l_1l_2 + 2l_1l_3 + 2l_1l_4 + 2l_3l_2 + 2l_4l_2 + 2l_3l_4$ e l'unica possibilità è che $l_i l_j = 1$ se $i \neq j$. $R = l_2 + l_3 + l_4$ è nef e $R^2 = 0$. D'altronde R soddisfa le ipotesi del corollario del teorema 10 e quindi $h^1(R) = 0$. Per Riemann-Roch $h^0(R) = 2$ e quindi $R = E$ per qualche curva ellittica dentro la superficie. Abbiamo quindi scritto $H = l + E$ come somma di una (-2) curva e una curva ellittica e $lE = 3$ e $HE = 3$.

Dentro la nostra superficie, ci sono innumerevoli altre rette. Generalizzando quanto detto prima, e denotando ξ_i le soluzioni di $x^4 = 1$, troviamo due famiglie di 16 rette ciascuna:

$$\begin{aligned} -l_{i,j} : x_0 &= \xi_i x_1, x_2 = \xi_j x_3 \\ -r_{i,j} : x_0 &= \xi_i x_3, x_1 = \xi_j x_2 \end{aligned}$$

Ragionando come prima per ognuna esiste una curva ellittica $E_{l_{i,j}}$ tale che $H = E_{l_{i,j}} + l_{i,j}$ e $E_{l_{i,j}} l_{i,j} = 3$ e $H E_{l_{i,j}} = 3$. Infatti, per ogni i fissato, ognuna delle le $l_{i,j}$ si trova che l'iperpiano $H : x_0 = \xi_i x_1$ taglia la superficie nelle 4 rette $l_{i,j} : x_0 = \xi_i x_1, x_2 = \xi_j x_3$ al variare di j . Analogamente per le rette della seconda famiglia.

Si ha che $l_{i,j} l_{a,b} = 1$ se e solo se $i = a$ oppure $b = j$ e analogamente per le altre. Inoltre $l_{i,j} r_{a,b} = 1$ se e solo se $a \equiv_4 i + j + b$, come si vede per conto diretto. Vogliamo ora capire come si posizionano le diverse curve ellittiche tra loro e in relazione alle rette. Siano quindi l, r due rette qualsiasi di quelle precedenti e E_l, E_r le curve ellittiche relative. Abbiamo che $3 = H E_l = (r + E_r) E_l = r E_l + E_r E_l$, $3 = H E_r = (l + E_l) E_r = l E_r + E_l E_r$ e infine $4 = H^2 = (l + E_l)(r + E_r) = l r + E_l r + l E_r + E_l E_r$. Risolvendo il sistema si trova che:

- Se $l r = 0$, cioè se l e r non si intersecano allora
 $r E_l = 0 = l E_r$, cioè la retta non interseca la cubica dell'altra retta
e $E R = 3$, cioè le due cubiche si intersecano in 3 punti.
- Se $l r = 1$, cioè se l e r si intersecano allora
 $r E_l = 1 = l E_r$, cioè la retta interseca la cubica dell'altra retta in un punto
e $E R = 2$, cioè le due cubiche si intersecano in 2 punti.