SCHÉMAS EN GROUPES SUR $\mathbb{Z}_p$? ET STRUCTURES DE NIVEAU

1. INTRODUCTION/MOTIVATION
2. BORELS ET SYSTÈMES DE RACINES.
3. SCHÉMAS EN GROUPES "RAMIFIÉS"
4. REPRÉSENTATIONS IRRÉDUCTIBLES ET RACINES
5. CONSTRUCTION DE $\mathcal{G}$.

1 INTRODUCTION ET MOTIVATION.

$k = \mathbb{F}_p, \overline{\mathbb{F}_p}$

X / k COURBE LISSE PROJECTIVE.

G GROUPE ALGÉBRIQUE SCINDÉ

$\{\pi_1(X) \to G(\mathbb{Q}_\ell)\}$ $\longleftrightarrow$ $\{G\text{-TRUCS AUTOMORPHES}\}$

$G(\mathbb{A}_X)$ ← ADÈLES.

G/k ? $\dfrac{G \times X}{X}$

$$Kl_n : \pi_1(\mathbb{P}^1 - \{0, \infty\}) \to GL_n(\mathbb{Q}_\ell)$$

$\mathbb{P}^1$ ↑ X

MODÉRÉ EN 0

SAUVAGE EN ∞ $sw_\infty(Kl_n) = ?$

INTERPRÉTATION AUTOMORPHE ?

GÉNÉRALISATION POUR $G \neq GL_n$?

$\{\pi_1(X) \to G(\mathbb{Q}_\ell)\} \overset{?}{\longleftrightarrow} \{G\text{-TRUCS-AUTOMORPHES}\}$

$\int (\mathbb{A}_X)$

PAS CASSANT

$\mathcal{J} \to \mathbb{P}^1$ DOIT CODIFIER LA RAMIFICATION EN $\{0\}$ ET $\{\infty\}$ DONC $\mathcal{J} \neq G \times \mathbb{P}^1$.

• CÔTÉ REPRÉSENTATIONS

$$0 \to \underbrace{I_0 \oplus I_\infty}_{} \to \pi_1(\underbrace{\mathbb{P}^1 - \{0, \infty\}}_{= X}) \twoheadrightarrow \pi_1(\underbrace{\mathbb{P}^1}_{= \bar{X}}) \to 0$$

SOUS GROUPE D'INERTIE.

GROTHENDIECK : $\rho_\ell : \pi_1(X) \to GL_n(\mathbb{Q}_\ell)$. $\# p$

$\mathrm{Im}(I_0)$ EST (PRESQUE) UNIPOTENT $\subseteq \begin{pmatrix} 1 & * & * \\ & 1 & * \\ & & 1 \end{pmatrix}$

$\mathrm{Im}(I_\infty)$ " $\subseteq \begin{pmatrix} 1 & * \\ & 1 \end{pmatrix}$

À CONJ-PRÈS.

$\mathrm{Im}(I_?) \subseteq R_n(B)$

BOREL.

EX $y^2 = x(x-1)(x-T)$ $\rho_\ell(I_0) \subseteq \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \subseteq GL_2 \;\; = B$

$\downarrow$

$\mathbb{P}^1 - \{0, 1, \infty\}$ (I_0, I_∞) $\rho_\ell(I_\infty) \subseteq \begin{pmatrix} ? & ? \\ ? & 1 \end{pmatrix} \subseteq GL_2$

CÔTÉ AUTOMORPHE ?

$$\overset{\shortparallel}{B^{opp}}$$

$$\mathcal{G}(\hat{\mathcal{O}}_{\bar{X},0}) \overset{?}{=} \begin{pmatrix} 1+TK[[T]] & & K((T)) \\ TK[[T]] & \ddots & \\ TK[[T]] & \cdots & 1+TK[[T]] \end{pmatrix}$$

$T \to 0$

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ 0 & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \subseteq B$$

$$\mathcal{G}(\hat{\mathcal{O}}_{\bar{X},\infty}) = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \subseteq B^{opp}.$$

$$\mathcal{G}(\hat{\mathcal{O}}_{\bar{X},?}) \subseteq G(K((T)))$$ DÉFINI PAR DES CONGRUENCES DÉPENDANT DU BORD.

CÔTÉ REPRÉSENTATION:

MODÉRÉ EN 0 $\quad \rho(I_0)$ N'EST PAS DIVISIBLE PAR p.

SAUVAGE ENC
(PAS TROP)

$P(I_{Q})$ EST DIVISIBLE
PAR p
(PAS TROP)

CÔTÉ AUTOMORPHE:

$$\mathcal{S}(\hat{U}_{x,0})$$

LES ENTRÉES NE SONT
PAS DIVISIBLES
PAR t^2

$$\begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{S}(\hat{U}_{x,0}) \subseteq \left\{ \begin{matrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & 1 & & \\ 0 & & 0 & 1 & \\ & 1 & & 0 & 1 \\ & & & & 1 \end{matrix} \;\middle|\; \beta \right\}$$

$\cap$ CERTAINES ENTRÉES SONT
$B^{opp.}$ DIVISIBLES PAR t^2.

ON A BESOIN D'UN CONTRÔLE FIN SUR
LES ÉLÉMENTS DU BORD.

② BORELS ET RACINES.

G/K SCINDÉ RÉDUCTIF $\quad T \subseteq G$ TORE MAXIMAL SCINDÉ. ($\simeq \mathbb{G}_m^n$)

$\Phi(G,T)$ RACINES

$= \{ T \xrightarrow{x} \mathbb{G}_m \neq 1$ APPARAISSANT DANS L'ACTION $T \to GL(\mathrm{LIE}(G)) \}$

$x \in X^\bullet(T)$

EX :

① $G = GL_4$ $\quad \mathrm{LIE}(G) = M_4 = \bigoplus_i E_{ii} \oplus \bigoplus_{i \neq j} E_{ij}$

$T = \begin{pmatrix} a_1 & & & 0 \\ & a_2 & & \\ & & a_3 & \\ 0 & & & a_4 \end{pmatrix}$ $\quad \Phi(G,T)$

$X^\bullet(T) = \langle x_1, x_2, x_3, x_4 \rangle$ $\quad \| \; \begin{pmatrix} \otimes & \otimes & \otimes \\ \otimes & \otimes & \otimes \end{pmatrix}$

$\{ \pm x_1 - x_2, \pm x_1 - x_3, \pm x_1 - x_4, \pm x_2 - x_3, \pm x_2 - x_4, \pm x_3 - x_4 \}$

② $SL_4 \supseteq T = \begin{pmatrix} a & & & 0 \\ & b & & \\ & & c & \\ 0 & & & a^{-1}b^{-1}c^{-1} \end{pmatrix}$ ($G = SL_4$)

$$x_4 = -x_1 + x$$

$$X^*(T) = \langle x_1, x_2, x_3 \rangle$$

$$\mathrm{LIE}(SL_4) = M_4^{tr=0} = \bigoplus_{i \neq j} E_{ij} \bigoplus_{i \neq j} E_{11} - E_{ii}$$

$$\Phi(G,T) = \{ \pm x_1 - x_2, \pm x_1 - x_3, \pm 2x_1 + x_2 + x_3, \pm x_2 - x_3, \pm 2x_2 + x_1 + x_3, \pm 2x_3 + x_1 + x_2 \}$$

$$0 \to \langle \Phi(G,T) \rangle \subseteq X^*(T) \to \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \to 0$$

$$\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} = |Z_G|$$

③ $Sp_4 \subseteq GL_4 \mid \{ g \mid {}^t g J g = J \}$

$$T = \begin{pmatrix} a & & & \\ & b & & \\ & & a^{-1} & \\ & & & b^{-1} \end{pmatrix} \quad X^*(T) = \langle x_1, x_2 \rangle \quad J = \begin{pmatrix} 0 & I_2 \\ -I_2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{LIE}(Sp_4) \subseteq M_4 \qquad Jg = {}^t g^{-1} J$$

$$\left\{ \begin{pmatrix} A & B \\ C & -{}^t A \end{pmatrix} \middle| \; B = {}^t B, \; C = {}^t C \right\} \Leftarrow JM - {}^t M J = 0$$

$$\langle \overset{\text{TRIV}}{E_{1,1}}, \overset{\text{TRIV.}}{E_{2,2}}, \overset{x_1 - x_2}{E_{1,2}}, \overset{x_2 - x_1}{E_{2,1}},$$

$E_{3,1}^{x_1^2}$, $E_{4,2}^{x_2^2}$, $E_{32}^{-x_1-x_2} + E_{41}$,

$E_{1,3}^{-x_1^2}$, $E_{24}^{-x_2^2}$ $E_{23}^{x_2+x_1} + E_{14}$ $\not\to$

$\Phi(G,T) = \{\pm(x_1 - x_2), \pm x_1^{-2}, \pm x_2^{-2}, \pm x_1^{-1} x_2^{-1}\}$

$$\left(\begin{pmatrix} a^{-1} & & & \\ & b^{-1} & & \\ & & a & \\ & & & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & & & \\ & b & & \\ & & a^{-1} & \\ & & & b^{-1} \end{pmatrix} \right.$$

$$(1, \begin{pmatrix} 0 & 0 & a^{-1} & a^{-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & 0 \\ 0 & & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & & & \\ & b & & \\ & & a^{-1} & \\ & & & b^{-1} \end{pmatrix}$$

<u>PROP</u>: $x \subseteq \Phi(G,T)$ $\exists!$ sous-grou.

$U_x \subseteq G$ |

(1) $U_x \cong G_a$

② T NORMALISE U_α

③ $\mathrm{LIE}(U_\alpha) = \langle \mathfrak{g}_\alpha \rangle \subseteq \mathrm{LIE}(G)$

U_α EST LE ROOT-GROUPE DE α

EX

① GL_n

$$U_{x_1 - x_2} \qquad \begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$U_{x_i - x_j}$

$i \neq j$ " $I_n + aE_{i,j}$

② SL_n MÊME. $\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$

③ Sp_4 $\qquad x_1 - x_2$

$$U_{x_1-x_2} = \begin{pmatrix} 1 & a & \multicolumn{2}{c}{0} \\ -a & 1 & & \\ & & 1 & a \\ \multicolumn{2}{c}{0} & -a & 1 \end{pmatrix}$$

$$U_{x_2-x_1} \quad \begin{pmatrix} 1 & -a & & \\ 0 & 1 & & \\ & & 1 & a \\ & & a & 1 \end{pmatrix}$$

$$U_{2x_1} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & a & 0 \\ & 1 & 0 & 0 \\ & & 1 & 0 \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

$$U_{2x_2} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & a \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$U_{-2x_1} = {}^tU_{2x_1}$$

$$U_{-x_1+x_2} = \begin{pmatrix} 1 & & 0 & 0 \\ & & 0 & 0 \\ a & 1 & 1 & 0 \\ & & 1 & \end{pmatrix}$$

DÉF $\Phi^+ \subseteq \Phi$ ENSEMBLE DE RACINES POSITIFS SI $\forall \alpha$ ① α OU $-\alpha \in \Phi^+$

② $\alpha, \beta \in \Phi^+ \Rightarrow \alpha+\beta \in \Phi^+$ / $\alpha+\beta \in \Phi$

PROP

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{SOUS GROUPES} \\ \text{DE BOREL} \\ T \subseteq B \end{array} \right\} \longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} S \subseteq \Phi \\ \text{RACINES POSITIVES} \end{array} \right\}$$

$$B \longrightarrow \{ x \in \Phi \;\; \mathfrak{g}_x \in \mathrm{LIE}(B) \}$$

$$\langle U_x, T \rangle \longleftarrow\!\!\shortmid \{ \;\; x \;\; \}$$

$$\langle U_{x_n} \rangle \cancel{\times} T$$

$R_n(B)$.

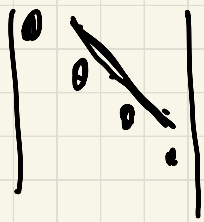
$$\Phi = \Phi^+ \amalg \Phi^- \qquad B^{opp} = B_{\Phi^-}$$

DEF x RACINES SIMPLES SI $x \in \Phi^+$

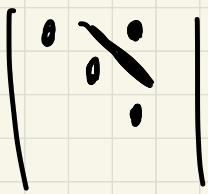
$$x_1 \neq x_1 + x_2 \qquad x_1 + x_2 \in \Phi^+$$

$$U_{x_1} U_{x_2} \supseteq U_x \iff x = x_1 + x_2$$

EX GL_4 $\qquad x_1 - x_2,\ x_2 - x_3,\ x_3 - x_4$



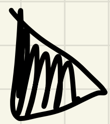
$$x_1 - x_2 + x_2 - x_3 = x_1 - x_3$$



Ex

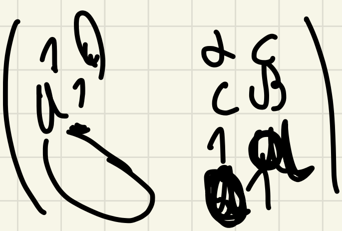
- $G = GL_4$ $\quad \Phi^+ = \{x_1 - x_2,\ x_1 - x_3,\ x_1 - x_4,\ x_2 - x_3,\ x_2 - x_4,\ x_3 - x_4\}$

Φ^-



- $G = SL_4$ $\quad =$

- $G = Sp_4$ $\quad \langle x_1 - x_2,\ 2x_1,\ 2x_2,\ x_1 + x_2 \rangle$



$$T: \left(\begin{array}{c|c} {}^t m^{-1} & mM \\ \hline 0 & m \end{array}\right)$$

M sym.
m unipotent.

<u>DEF</u> / <u>PROP</u> (CHEVALLEY BASES)

IL $\exists$ UNE CHOIX "CANONIQUE"

D'ISOMORPHISME $\{ \varphi_{\alpha} : U_{\alpha} \simeq \mathbb{G}_a \}_{\alpha \in \Phi^+}$

③ SCHÉMAS EN GROUPES RAMIFIÉS

K CORPS LOCAL $\quad T \subseteq B \subseteq G_{/k}$ SCINDÉ

$|\cdot| \to \mathbb{R}_{\geq 0} \qquad \mathcal{O}_K \supseteq \mathfrak{m} = (\pi)$

$k = \frac{\mathcal{O}_K}{\mathfrak{m}} \qquad |\pi| = \frac{1}{p} \qquad \mathrm{CAR}(k) = p > 0$

$\Phi^+ \rightsquigarrow \{ \varphi_{\alpha} : U_a \simeq \mathbb{G}_a \}_{\alpha \in \Phi^+}$

$U_a(K) \xrightarrow{\sim} K \xrightarrow{|\cdot|} \mathbb{R}_{\geq 0}$

$\forall \ell \in \mathbb{N}_{\geq 0}$

$U_a(K)_{\ell} := \pi^{-1}([0, p^{-\ell})) \subseteq U_a(K)$

SOUS-GROUPE $\quad U_a(K)_0 = \mathcal{O}_K$

$$|a+b| \leq \max\{|a|, |b|\} \leq \ell$$

$U_0 := T$ $\qquad U_0(K) = (K^*)^n$

$$U_0(\mathcal{O}_K) = (\mathcal{O}_K^*)^n$$

$$U_0(K)_\ell = \{ x \in T(\mathcal{O}_K) \mid x \equiv_{T^\ell} 1 \}$$

$$U_0(K)_0 = T(\mathcal{O}_K)$$

EX

- GL_4

$$U_{x_1 - x_2}(K) = \begin{bmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$U_{x_1 - x_2}(K)_n = \begin{bmatrix} 1 & t^n a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ON METS ENSEMBLES LES U_x POUR AVOIR LE BOREL.

DÉF $f : \Phi \cup \{0\} \to \mathbb{N}_{\geq 0}$ EST CONCAVE

SI

$\forall (x_i) \in \Phi \cup \{0\} \quad | \quad \sum x_i \in \Phi$

$$\sum f(x_i) \geq f\left(\sum x_i\right)$$

$$G(K)_f := \langle U_x(K)_{f(x)} \rangle_{x \in \Phi \cup \{0\}} \subseteq G(K)$$

<u>THM</u> f CONCAVE, $f(0) > 0$

① $\exists !$ MODEL LISSE $G_f \hookrightarrow \mathcal{O}_K$ TEL QUE

$$G_f(\mathcal{O}_K) = G(K)_f$$

② $\overline{U_x(K)_{f(x)}}^{ZAR} \subseteq G_f$ LISSE ET $\forall$

$\;$ $\shortparallel$

$$U_{x,f(x)} \qquad\qquad U_{x,f(x)}(\mathcal{O}) = U_x(K)_{f(x)}$$

<u>NON-EX</u> SL_4

$$\begin{pmatrix} 1 & T^{-2} & T & T^3 \\ & 1 & T & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix} \alpha_2$$

$$\begin{pmatrix} 1 & T & 0 \\ & 1 & T \\ & & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & T & 0 \\ & 1 & T \\ & & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & T^2 \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

$$\underset{\substack{\shortparallel \\ 1}}{f(\alpha_1)} + \underset{\substack{\shortparallel \\ 1}}{f(\alpha_2)} = \underset{\substack{\shortparallel \\ 3}}{f(\alpha_1+\alpha_2)}$$

Ex 1

$f(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{Q}^+ \cup \{0\}$ $\quad f(x) = 1$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad f(0) = 0$

$\{x \in U_x(K) \mid |x| \leq 1\} = \{U_x(\mathcal{O}_K)\}$

$\qquad\qquad\qquad\qquad x = 1$

$\{x \in G_m^n(\mathcal{O}_K)$

$G = GL_n \qquad GL_n(\mathcal{O}_K), SL_n(\mathcal{O}_K)$

Ex 2

$f(x) = 0 \quad x \in \mathbb{Q}^+ \cup \{0\} \qquad I(1)$

$f(x) = 1 \quad x \in \mathbb{Q}^-$

$U_x(K) =_f \mathcal{O}_K \quad x \in \mathbb{Q}^+$

$(\mathcal{O}_K^\circ)^n \; x \in 0$

$U_x(K) = T\mathcal{O}_K \quad x \in \mathbb{Q}^-$

GL_n
SL_n

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} O_K & O_K & O_K & O_t \\ TO_K & \ddots & & \\ TO_K & \ddots & \ddots & \\ TO_K & TO_K & TO_K \cdots & O_K \end{pmatrix}$$

MODULO T

$$\begin{pmatrix} O_K & & \\ & \ddots & \\ 0 & & O_K \end{pmatrix}$$ BOREL.

Ex 3

$f(x) = 0 \quad x \in \Phi^+$ $\qquad I(1)$

$f(x) = 1 \quad x \in \Phi^- \cup \{0\}$

$$\begin{pmatrix} 1+TO_K & O_K & O_K & O_t \\ TO_K & 1+TO_K & & \\ TO_K & \ddots & \ddots & \\ TO_K & TO_K & TO_K \cdots & 1+TO_K \end{pmatrix}$$

Ex 4

$f(0) = 1$

$f(x) = 0 \quad x \in \Phi^+$ PAS SIMPLE

$f(x) = 1 \quad x \in \Phi^+$ simple.

$f(x) = 1 \quad x \in \Phi^-$ AUTREMENT.

$$\Sigma f(x) \geq f(\Sigma(x)) = 1$$

$$\begin{pmatrix} 1+T\theta_k & T\theta_k & \theta_k & \theta_k \\ & 1+T\theta_k & T\theta_k & \theta_k \\ & & 1+T\theta_k & T\theta_k \\ & & & 1+T\theta_k \end{pmatrix}$$

4 REPRÉSENTATIONS IRRÉDUCTIBLES ET RACINES

$$T \subseteq B \subseteq G \qquad \Phi^+(G,T) \subseteq \Phi = \Phi^+ \sqcup \Phi^-$$

$$R_u(B) = (U_x)_{x \in \Phi^+} \qquad \Phi \subseteq X^\bullet(T)$$

$\Phi^\vee$ CORACINES $\subseteq X_\bullet(T)$

$$\Phi \xhookrightarrow[(-)^\vee]{1:1} \Phi^\vee \quad \Big| \quad X^\bullet(T) \times X_\bullet(T) \xrightarrow{(\,,\,)} \mathbb{Z}$$

$$(x, x^\vee) \longmapsto 2$$

<u>LEMME</u> : $G \curvearrowright V$ IRRÉDUCTIBLE.

- $\dim(V^U) = 1$

$T \curvearrowright V^U \simeq \chi_V \in X^\bullet(T)$ ET

- $(\chi_V, x^\vee) > 0 \quad \forall x \in \Phi^+$
- $(\chi_V - \tilde{\chi}, x^\vee) > 0 \quad \forall \tilde{\chi} \in V \quad \forall x \in \Phi^+$

DEF :

(1) χ_V EST LE POIDS PLUS GRANDE DE V

(2) $\chi \in X^*(T)$ EST DOMINANT SI

$$(\chi, \chi^\vee) \geq 0 \quad \forall \chi^\vee \in \Phi^\vee$$

THM

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{REP} \\ \text{IRREDUCIBLES DE } G \end{array} \right\} \xleftrightarrow{1:1} \left\{ \begin{array}{c} \chi \in X^*(T) \\ \text{DOMINANT} \end{array} \right\}$$

$$V \longmapsto \chi_V$$

EX

$$x_1 - x_2 \longrightarrow e_1^2$$

(1) SL_2 $\qquad X^*(T) = \mathbb{Z}^2 / (e_1 + e_2) \cong \mathbb{Z} e_1$

$X_*(T) = \langle e_1, e_2 \rangle^2$

- $\Phi(SL_2) = \{x_1 - x_2, x_2 - x_1\}$

$\Phi^\vee = \langle e_1 - e_2, e_2 - e_1 \rangle$

$(x_1 - x_2)^\vee = e_1 - e_2$

$x \mid (x, e_1 - e_2) \geq 0$

$$\begin{array}{c} \| \\ (\overset{n_1}{e_1} + \overset{n_2}{e_2}, e_1 - e_2) \\ \Updownarrow \\ n_1 \geq n_2 \end{array}$$

$n_1 e_1 + n_2 e_2$

$\|$

$(n_1 - n_2) e_1$

x DOMINANT $\iff$ $n e_1$ $n \geq 0$

CONSTRUCTION DE V ASSOCIÉE À x

$V = \{ f \in k[x,y]$ HOMOG$(f) = n$

$SL_2 \curvearrowright V$ $\quad f(x,y) \mapsto f(\underline{ax+cy, bx+dy})$?

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}^{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}}$

$\|$

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{matrix} ax + by \\ cx + dy \end{matrix}$

$U = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad f \mapsto f(x, bx + y)$

$V^\vee = \langle \cancel{y}^n \rangle$

$T = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} \circlearrowright_n x_2 \quad x \mapsto a^{+m} y^n$

$\qquad\qquad\qquad\quad \parallel \qquad\qquad\qquad\qquad !$

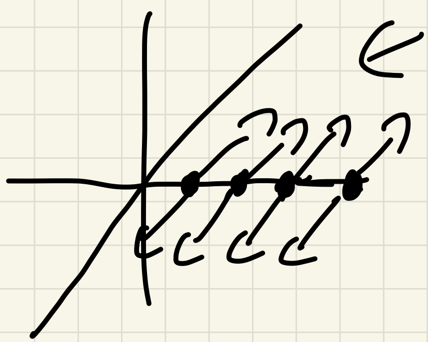
$\qquad\qquad\qquad +n x_1$

• $GL_2 \qquad (x_1 - x_2) \qquad \mathbb{Z}^2$

$(e_1 - e_2)$

$(n_1^{x_1}, n_2^{x_2} \mid (e_1 - e_2)) = n_1 \cancel{+} n_2 \geq 0$

$n_1 \geq n_2$



$GL_2 \circlearrowright V$

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \circlearrowright V^\vee$

$n \cancel{x}_1$

$GL_2 \circlearrowright V \otimes \mathrm{DET}(GL_n)^{\otimes m}$

$T \circlearrowright V^\vee$

$\begin{pmatrix} a & \\ & b \end{pmatrix}$ $\quad x \mapsto a^m b^m a^n x^n$

$= a^{n+m}(b^m)$

$(n+m, m)$

<u>EX</u> SL_4 $\quad NM = \dot{M} N$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$$

M UNIPOTENTE.
N TRACCIA 0.

$(x_i - x_j, e_h - e_k) > 0$

$\forall h,k \quad h > \cancel{j}k$

$i > j$

$\cancel{\delta}\delta_{i,h} - \delta_{j,h} - \delta_{i,k} + \delta_{j,k}$?

CONT NEGATIVO SOLO SE.

$j = h$ $\quad h \neq i$ OU $\quad k = i \quad k \neq j$

$-1 - \delta_{i,k} < 0.$

non può succedere sola se. $j = 1$

$k = i \Rightarrow h \neq i$

$\delta_{k,h} - \delta_{j,h} - 1 +$

$\underline{i = h}$ non può succ.

$E_{1,h}$

5 CONSTRUCTION DE $\mathcal{G}$.

$X = \mathbb{P}^1 - \{0, \infty\}$

G RÉDUCTIF SCINDÉ SUR K

$Z(G)^0 \subseteq G$ TORE SCINDÉ

$\cup \quad \cup$

$T \subseteq B$

$\{\alpha_i\} = \Phi$

$\{\alpha_i^+\} = \Phi^+$

$\{\alpha_i^-\} = \Phi^-$

$\alpha_i \in \Phi^+$ QUI SONT DOMINANT

$m_0, m_\infty \in \mathbb{N}_{\geq 0} \qquad 0 \leq m_i \leq 2$

$\mathcal{Z}(G)^0(m_0, m_\infty) :=$ SCHÉMA EN GROUPE SUR $\mathbb{P}^1$

$Z(G)^0(m_0, m_\infty)_{|X} = Z(G)^0 \times X$

$Z(G)^0(m_0, m_\infty)(\hat{\mathcal{O}}_{\mathbb{P}^1, 0})$

$$\left\{ g \in Z(G)\left(\mathcal{O}_{1p^1,0}\right) \quad g \equiv 1 \right. \quad T^m ?$$

$$f_0 : \Phi(G^{DER}, T^{DER}) \cup \{0\} \longrightarrow \mathbb{N}$$

$$f_0(0) = 0 \qquad I(0)$$

$$f_0(x^+) = 0$$

$$f_0(x^-) = 1$$

$$f_1 : \Phi(G^{DER}, T^{DER}) \cup \{0\} \longrightarrow \mathbb{N}$$

$$f_1(0) = 1 \qquad I(1)$$

$$f_1(x^+) = 0$$

$$f_0(x^-) = 1$$

$$f_2 : \Phi(G^{DER}, T^{DER}) \cup \{0\} \longrightarrow \mathbb{N}$$

CONCAVE

$$f_2(0) = 1 \qquad I(2)$$

$f_2(x) = 0$ $\quad x$ POSITIVE PAS SIMPLE

$f_2(x) = 1$ $\quad \Phi^- \setminus \{-\theta_j\}$

$b_2(\Theta_j) = 1$ $\boxed{b_i^{opp}}$

$\mathcal{G}^{DER}(n_0, n_\infty) :=$ SCHÉMA EN GROUPES SUR $\mathbb{P}^1$

$$\begin{cases} \mathcal{G}^{DER}|_X \simeq G^{DER} \times \cancel{X} \\ \mathcal{G}^{DER}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1,0}) = G_{b_{n_0}}^{opp}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1,0}) \\ \mathcal{G}^{DER}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1,\infty}) = G_{b_{n_\infty}}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1,\infty}) \end{cases}$$

$$\mathcal{G}^{(n_0,n_\infty)} = \mathcal{G}^{DER}\, Z(G)(n_0, n_\infty)$$

<u>THM</u> TOUT ~~clean~~ CE QU'ON A FAIT POUR $G \times \mathbb{P}^1$ MARCHE POUR $\mathcal{G}$.

$\mathrm{Gr}_{\mathcal{G}} \to \mathrm{Bun}_{\mathcal{G}}$ ETC....

EX $\quad G = SL_4$

$$\mathcal{S}(1,2)\left(\hat{\mathcal{O}}_{\mathbb{P}^1,\infty}\right)$$

$$\parallel$$

$$\begin{pmatrix} 1+TK[[T]] & TK[[T]] & K[[T]] & K[[T]] \\ TK[[T]] & 1+TK[[T]] & TK[[T]] & K[[T]] \\ TK[[T]] & TK[[T]] & 1+TK[[T]] & TK[[T]] \\ T^2K[[T]] & TK[[T]] & TK[[T]] & 1+TK[[T]] \end{pmatrix}$$

$T \to 0 \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & K & K \\ & 1 & 0 & K \\ & & 1 & 0 \\ & 0 & & 1 \end{bmatrix}$

$T^2 \to 0 \qquad \begin{pmatrix} & & & \\ & & & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$

$$\mathcal{S}(1,2)\left(\hat{\mathcal{O}}_{\mathbb{P}^1,0}\right)$$

$$\shortparallel$$

$$\begin{pmatrix} 1+TK\bar{\Gamma}(\Gamma(T)) & TK\bar{\Gamma}(\Gamma(t)) & TK(\bar{\Gamma}(t)) & TK\bar{\Gamma}(t) \\ K\Gamma(\Gamma(t)) & 1+TK\Gamma(\Gamma(t)) & \ddots & \ddots \\ \vdots & K\Gamma(\Gamma(t)) & 1+TK\Gamma(\Gamma(t)) & \\ & \vdots & K\Gamma(\Gamma(t)) & 1+TK\bar{\Gamma}(\Gamma(t)) \end{pmatrix}$$

$$T \to 0$$

$$\begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ K\Gamma(\Gamma(t)) & 1 & & \\ K\Gamma(\Gamma(t)) & \ddots & 1 & \\ K\Gamma(\Gamma(t)) & \ddots & \ddots & 1 \end{pmatrix}$$