NOMBRES DE BETTI DES DÉGÉNÉRATIONS SEMISTABLES RÉELLES.

AVEC MATILDE MANZAROLI

1§ INTRODUCTION.

C COURBE LISSE (ALGÉBRIQUE) SUR $\mathbb{C}$

$0 \in C(\mathbb{C})$

$$\begin{tikzcd}
X_0 \arrow[r, hook] \arrow[d] & X \arrow[d, "f"] & X_t \arrow[l, hook'] \arrow[d] \\
\{0\} \arrow[r, hook] & C & \{t\} \arrow[l, hook']
\end{tikzcd}$$

PROJECTIVE LISSE SUR $\mathbb{C}$ ET SEMISTABLE EN 0.

I.E. $\circ$ DANS UN VOISINAGE DE 0

$$\begin{tikzcd}
X = \{x_1 \cdots x_n - T = 0\} \subseteq \mathbb{C}^n \times \mathbb{C} \arrow[d, "\pi_2"] \\
C = \mathbb{C}
\end{tikzcd}$$

• $X_0 = \bigcup_{i \in I} X_i$ $\quad$ $J \subseteq I$ $\quad X_J = \bigcap_{i \in J} X_i$ LISSE IRRÉDUCTIBLE

X $\quad$ $\underline{\alpha \text{ no!}}$

$\forall t, t' \in C(\mathbb{C}) - \{0\}$ $\quad X_t(\mathbb{C}) \overset{\text{QMB}}{\simeq} X_{t'}(\mathbb{C})$

<u>PROBLÈME</u> :

COMPRENDRE X_t À PARTIR DE X_0 ?

STEENBRINK :

$\dim(H^m(X_t, \mathbb{Q}))$ PEUT ÊTRE CALCULÉ À PARTIR DE X_0.

I.E. $$E_1^{p,q} = \bigoplus_{a \geq \max\{q,p\}} \bigoplus_{|J| = 2a-p} H^{2p+q-2a}(X_J)$$

$$\dim(H^n(X_t, \mathbb{Q})) = \sum_{p+q=n} \dim\left(\frac{\ker(E_1^{p,q} \xrightarrow{d} E_1^{p+1,q})}{\operatorname{im}(E_1^{p-1,q} \xrightarrow{d} E_1^{p,q})}\right)$$

ANALOGUE RÉEL ?

X VARIÉTÉ RÉELLE $\Longleftrightarrow$ $\underset{\text{COMPLEXE}}{X(\mathbb{C})} + \underset{\text{INV. ANTI-HOLOM.}}{\sigma}$

$X(\mathbb{R}) = \operatorname{FIX}(\sigma)$

 $\subseteq \mathbb{C}^2$

$$\begin{array}{c} \sigma \circlearrowright X \\ \downarrow f \\ \sigma \circlearrowright \mathbb{C} \end{array}$$

RÉEL

$\sigma \circ f = f \circ \sigma$

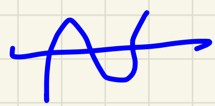
$0 \in \mathbb{C}(\mathbb{R})$

LOCALEMENT $\mathbb{C}-\{0\}$ EST PAS CONNEXE.

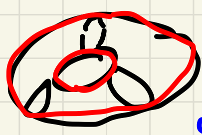
$\mathbb{R}$

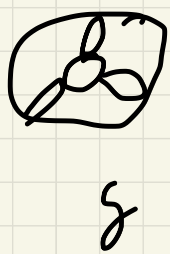
$\forall i\ X_i$ EST VARIÉTÉ RÉEL

LA TOPOLOGIE DE X_t POUR $t>0$ ET $t<0$ PEUT ÊTRE DIFFÉRENT.



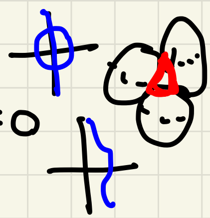
EX :





$x(x^2+y^2-1)-0.3=0$

$x(x^2+y^2-1)=0$

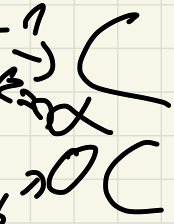


$x(x^2+y^2-1)-1=0$

$k=-1$

$k=0$

$k=1$



DONC ON NE PEUT PAS CALCULER $\dim H^i(X_t(\mathbb{R}))$ À PARTIR DE $X_0(\mathbb{R})$.

RÉEL ET COMPLEXE.

EN SACHANT X_0 ÉTUDIER $X_{\mathbb{R}}(\mathbb{R})$.

LES INFORMATIONS QUE ON PEUT TROUVER.
NE DOIT DÉPENDRE PAS DE L'INVOLUTION,
DONC ON CHERCHE DES INFORMATION
EN RELIANT $X(\mathbb{C})$ ET $X(\mathbb{R})$.

$$b_i(X(\mathbb{C})) := \dim_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}} H^i(X(\mathbb{C}), \mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$$

$$b_i(X(\mathbb{R})) := \quad " \quad H^i(X(\mathbb{R})).$$

SMITH-THM: $\forall$ VAR. RÉELLE X ON A:

$$\text{ST} \quad \underline{\sum b_i(X(\mathbb{R}))} \leq \underline{\sum b_i(X(\mathbb{C}))}$$

X MAXIMAL SI $=$.

E.G. ~~X~~ COURBE PROJECTIVE GENRE g. $X(\mathbb{R}) \simeq \coprod_I S^1$

$|I| \leq g(\mathbb{C}) + 1$ MAX $\Leftrightarrow$ $|I| =$

EN PARTANT DE X_0 ON VEUT RAFFINER ST POUR X_t

CONJECTURE (ITENBERG / VIRO)

$X \subseteq \mathbb{P}^n$ hypersurface réelle construite avec le patchwork primitif alors

$$b_i(X(\mathbb{R})) \leq \sum_{p \geq 0} \dim\left(H^i(X_{\mathbb{C}}, \Omega^p_X)\right) := h^{p,i}$$

- Prouvé par Renaudineau-Shaw '18 en utilisant la géométrie tropicale.

Traduction : On peut construire une dégénérescence $\begin{array}{c}\mathcal{X}\\ \downarrow \\ \mathbb{A}^1\end{array}$ torique de $X \subseteq \mathbb{P}^n$ réelle tel que

$\mathcal{X}_0$ peut être stratifiée avec des compléments d'arrangements d'hyperplans

$$X(\mathbb{R}) \hookrightarrow \text{COMBINATOIRE} \hookrightarrow X(\mathbb{C})$$

?

PATCHWORK

ITENBERG - KATZARKOV - MIKHALKIN - ZHARKOV.

HOMOLOGIE TROPICALE.

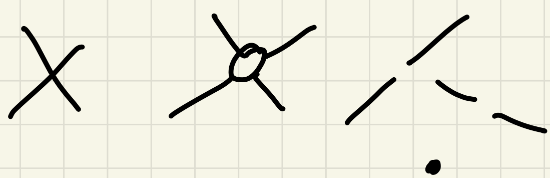
HOMOLOGIE TROPICALE RÉELLE

- PREUVE GÉOMÉTRIQUE?
- GÉNÉRALISATION GÉOMÉTRIQUE?

3 § RÉSULTAT.

SOIT $\mathcal{X} \to \mathbb{C}$ SEMISTABLE EN 0. RÉELLE. $X = \cup X_i$ X_i RÉELLE.

$$X_J^0 = X_J - \bigcup_{j \notin J} X$$



$$\mathcal{X}_0 = \coprod X_J^0 \quad \text{STRATIFICATION.}$$

ON FIXE $\Upsilon = \{X_J^0\}$ UNE STRATIFICATION

DE $X_\bullet = \coprod X^q_\Delta$ PLUS FINE QUE $\coprod X^q_j$

E.G. $\mathbb{P}^1$ DÉF. TRIVIALE. $(\mathbb{P}^1 - \{pt\}) \cup \{pt\}$

ON CONSIDÈRE LES CONDITIONS SUIVANTES SUIVANTES.

(a) $H^i(X^q_\Delta(\mathbb{R})) = 0 \quad i > 0$

(b) X EST MAXIMAL

(c) $H^i(X^q_\Delta(\mathbb{C}), \mathbb{Q})$ UNE STRUCTURE DE HODGE MIXTE PURE DE TYPE (i,i) ET $H^i(X^q_\Delta(\mathbb{C}), \mathbb{Z}) [2] = 0$

RMQ SATISFAIT CANONIQUE

$\forall$ ANNEAU A q, i ON CONSTRUIT UN COMPLEXE DE A-MODULE.

$C^\bullet_{q,A}(\mathbb{R})$ EN DÉPENDANT SEULEMENT DE $\{X^\bullet_\Delta(\mathbb{C})\}$ (ET DE A)

THM $\forall k$ PROCHE DE $\mathbb{Q}$.

① SI X_Δ^q SATISFAIT (a)+(b) ALORS

$$\forall i \quad b_i(X_k(\mathbb{R})) \le \sum_q \dim\left(H^i(C^\bullet_{q,\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}})\right)$$

② SI X_Δ^q SATISFAIT (a)+(b)+(c) ALORS

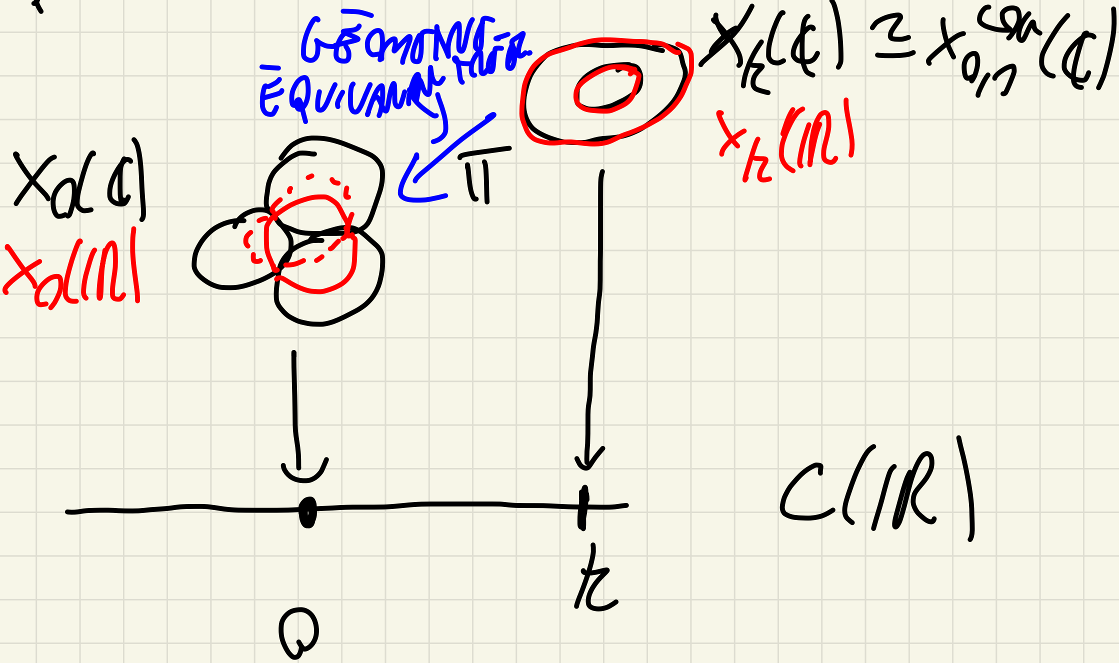
$$\dim\left(H^i(C_{q,\mathbb{Z}})\otimes \mathbb{Q}\right) = h^{i,q}$$

COROLLAIRE:

SI $H^\bullet(C_{q,\mathbb{Z}})[2]=0 \quad \forall q$

ALORS $b_i(X_k(\mathbb{R})) \le \sum_q h^{i,q}$

5) IDÉE DE LA PREUVE.



IL FAUT :

1. COMPARER X_0 ET X_t
2. COMPARER $X_0(\mathbb{C})$ ET $X_0(\mathbb{R})$ ET $X_t(\mathbb{C})$ ET $X_t(\mathbb{R})$

AU MÊME TEMPS.

OUTILS

1. GÉOMÉTRIE LOGARITHMIQUE RÉELLE