POINTS PARFAITS DES VARIÉTÉS ABÉLIENNES.

1- MOTIVATION.

K CORPS $\operatorname{car}(K) = p > 0$

INFINI FINIMENT ENGENDRÉ

$(\mathbb{F}_p(T))$

A/K VAR. ABÉ.

SANS FACTEURS D'ISOGÉNIES ISOTRIVIALES.

LANG-NÉRON $\Rightarrow A(K)$ EST DE TYPE FINI.

$X \subseteq A_{\bar{K}}$ SOUS VARIÉTÉ IRR.

$\Gamma \subseteq A(\bar{K})$ SOUS-GROUPE DE RANG FINI ($\Gamma \otimes \mathbb{R}$ A DIM < ∞)

<u>CONJECTURE</u> (MORDELL-LANG)

SI $X \cap \Gamma \subseteq X$ EST DENSE ALORS X EST LE TRANSLATÉ D'UNE SOUS-VARIÉTÉ ABÉLIENNE.

<u>THÉORÈME</u> (HRUSHOVSKI)

CONJECTURE EST VRAI SI Γ EST DE TYPE FINI.

K^{PERF} = CLOTURE PARFAITE DE K.

$$(\mathbb{F}_p(T))^{PERF} = \mathbb{F}_p(T, \sqrt[p]{T}, \sqrt[p^m]{T} \dots)$$

THÉORÈME (GHIOCA-MOOSA).

POUR PROUVER LA CONJECTURE ON PEUT SUPPOSER QUE

$$\Gamma \subseteq \boxed{A(K^{perf})}$$

2. $A(K^{perf}) = ?$

A SIMPLE, $A(K)\otimes\mathbb{Q} \neq 0$, $g = \dim(A)$

- EST-CE-QUE $A(K^{perf})$ EST DE TYPE FINI ?

<u>NO!</u> • $\ell \neq p$.

$$A[\ell](\bar{K}) = \left(\mathbb{Z}/\ell\right)^{2g}$$

$A[\ell]$ EST FINI ÉTALE.

• $\ell = p$ $\quad A[p](\bar{K}) = \left(\frac{\mathbb{Z}}{p}\right)^{p(A)}$

$$0 \leq p(A) \leq g$$

$\uparrow$

P-RANG DE A.

$$0 \to A[p]^0 \to A[p] \to A[p]^{\text{ét}} \to 0.$$

• SI $p(A) = 0$. $\quad A \xrightarrow{p} A$ EST INSEPARABLE. DONC

$$A(K^{\text{perf}}) \xrightarrow{\sim} A(K^{\text{perf}})$$

DONC $\quad A(K^{\text{perf}})_{p^\infty}$

$$\parallel$$

$$\{ x \mid \forall n \; \exists y_n \text{ TQ QUE } p^n y_n = x \}$$

$$A(K^{perf})_{p^\infty} = A(K^{perf})$$

$\Rightarrow$ $A(K^{perf})$ N'EST PAS DE TYPE FINI.

• DAVID HELM A CONSTRUIT UNE VARIÉTÉ AB $\dim(A)=4$ ORDINAIRE TELLE QUE $A(K^{perf})$ N'EST PAS DE TYPE FINI.

THÉORÈME (RÖSSLER) | $\deg \mathrm{tr}(K)=1$. A ORDINAIRE. ALORS

• SI $A(K^{perf})$ N'EST PAS DE FINI ALORS

A A BONNE RÉDUCTION PARTOUT.

- $A(K^{perf})_{p^\infty} \subseteq A(K^{perf})$.

$A[p^\infty]$ LE GROUPE p-DIVISIBLE DE A.

$$0 \to A[p^\infty]^0 \to A[p^\infty] \to A[p^\infty]^{\text{ét}} \to 0$$

$$h \in \mathrm{END}(A) \otimes \mathbb{Z}_p$$

$$\rightsquigarrow \quad h[p^\infty]^{\text{ét}} : A[p^\infty]^{\text{ét}} \to A[p^\infty]^{\text{ét}}.$$

<u>THÉORÈME</u> (A.).

[redacted] $A(K^{perf})$ N'EST PAS DE TYPE

FINI $\iff \exists\, e \in \mathrm{END}(A) \otimes \mathbb{Q}_p$

TELLES QUE

- $e^2 = e$
- $e[p^\infty]^{\text{ÉT}} = 0$.

[redacted] SI $\rho(A) > 0$ ALORS

$$A(K^{perf})_{p^\infty} \subseteq A(K^{perf})_{tors}$$

EXEMPLE

① SI $\mathrm{END}(A) \otimes \mathbb{Q}_p$ EST UNE ALGÈBRE À DIVISION, $\rho(A) > 0$ ALORS $A(K^{perf})$ EST DE TYPE FINI.

② $\rho(A) = 0$ $\quad e = \mathrm{ID}_A$

③ SI A EST ISOTRIVIAL LA SUITE

$$0 \to A[p^\infty]^0 \to A[p^\infty] \to A[p^\infty]^{\text{ét}} \to 0$$

EST SCINDÉ À MOINS D'ISOGÉNIE ET DONC IL Y A TOUJOURS UNE FLÈCHE COMME DANS LE THÉORÈME.

3. ÉCHAUFFEMENT:

$$|A(K^{perf})_{Tors}| < +\infty.$$

$\cdot\, \ell \neq p$ $\quad A(K)[\ell^\infty] = A(K^{perf})[\ell^\infty]$

$\cdot\, \ell = p$

$$|A(K^{perf})[p^\infty]| < +\infty$$

$\Vert$

$$\mathrm{Hom}_{p\text{-div}(K^{perf})}\left(\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p,\ A[p^\infty]\right) = 0$$

$$0 \to A[p^\infty]^0 \to A[p^\infty] \xrightarrow{\text{sur } K^{perf}} A[p^\infty]^{\text{ét}} \to 0$$

$$\mathrm{Hom}_{K^{perf}}\left(\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p,\ A[p^\infty]^{\text{ét}}\right)$$

$$\|$$

$$\mathrm{Hom}_K\Big(\underbrace{\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p}_{\text{poids } 0},\ \underbrace{A[p^\infty]^{\text{ét}}}_{\text{poids } 1}\Big) = 0$$

[redacted]

4- Flèche(s) d'Abel-Jacobi

pas de torsion

$$x \in A(K) \longleftrightarrow \left[\mathbb{Z} \to A,\ 1 \mapsto x\right]$$

RÉALISATION 1-MOTIF
$\swarrow$ p-ADIQUE.

$$M_X[p^n]$$
$$\parallel$$
$$\frac{\ker\left(X + p^n : \mathbb{Z} \times A \to A\right)}{\operatorname{Im}\left((p^n, X) : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \times A\right)}$$

$(m, y) \mapsto mX + p^n y$

$m \mapsto (mp^n, -mX)$

$(\bullet)_n$

$$0 \to A[p^n] \to M_X[p^n] \to \frac{\mathbb{Z}}{p^n\mathbb{Z}} \to 0.$$

$(\bullet)_n$ EST SCINDÉ $\iff$

X EST p^n-DIVISIBLE.

$$M_X[p^\infty] = \varinjlim M_X[p^n]$$

$0 \to A[p^\infty] \to M_x[p^\infty] \to \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p \to 0 \cdot \begin{pmatrix} \bullet \\ \infty \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} \bullet \\ x_\infty \end{pmatrix}$ EST SCINDÉ $\iff$

$x \in A(K)_{p^\infty}$

$$\begin{tikzcd}[column sep=large] x \arrow[r, mapsto] & \begin{pmatrix} \bullet \\ x_\infty \end{pmatrix} \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} AJ : A(K)_p \arrow[r] \arrow[dr, "AJ^{\text{ét}}"'] & \mathrm{Ext}^1\left(\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p, A[p^\infty]\right)_p \arrow[d] \\ & \mathrm{Ext}^1\left(\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p, A[p^\infty]^{\text{ét}}\right) \end{tikzcd}$$

- AJ EST INJECTIVE $\iff$

$A(K)_{p^\infty} \subseteq A(K)_{\text{TORS}}$

- $AJ^{\text{ét}}$ EST INJECTIVE $\iff$

$A(K^{\mathrm{PERF}})_{p^\infty} \subseteq A(K)_{\mathrm{TORS}}$

$$AJ_p : \begin{tikzcd} A(K)_{\mathbb{Q}_p} \arrow[r] \arrow[dr, "AJ_p^{\text{ÉT}}"'] & \mathrm{EXT}^1\left(\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p, A[p^\infty]\right) \arrow[d] \\ & \mathrm{EXT}^1\left(\mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p, A[p^\infty]^{\text{ÉT}}\right) \end{tikzcd}$$

<u>PROPOSITION</u> $A(K^{\mathrm{PERF}})$ EST FINIMENTE ENGENDRÉ $\Rightarrow$ $AJ_p^{\text{ÈT}}$ EST INJECTIVE.

THÉORÈME (A.)

- SI $\rho(A) > 0$ ALORS $A_{\mathfrak{I}}^{\text{ÉT}}$ EST INJECTIVE
- $A_{\mathfrak{I}_p}^{\text{ÉT}}$ N'EST PAS INJECTIVE

$\Leftrightarrow \exists\, e \neq 0$ $\mathrm{END}(A) \otimes \mathbb{Q}_p$

TEL QUE

- $e^2 = e$
- $e(p^\infty)^{\text{ÉT}} = 0$.

4. $A(K)_{\mathbb{Q}}$ VS $A(K)_{\mathbb{Q}_p}$

DE JONG: $\mathrm{END}(A) \otimes \mathbb{Q}_p = \mathrm{END}(A[p^\infty])_{\mathbb{Q}}$

1-MOTIF $\quad x \in A(K)$ PAS DE TORSION.

$$\mathrm{End}([\mathbb{Z} \to A]) \otimes \mathbb{Q}_p$$

$$\cong$$

$$\mathrm{End}(M_x[p^\infty])_{\mathbb{Q}} \cong \mathbb{Q}_p$$

A SIMPLE.

$$\mathrm{End}([\mathbb{Z} \to A]) \simeq \mathbb{Z}$$

$$\cong$$

$$\left\{ \begin{tikzcd} \mathbb{Z} \arrow[r] \arrow[d, "x"'] & \mathbb{Z} \arrow[d, "x"] \\ A \arrow[r, "h"] & A \end{tikzcd} \right\}$$

$$\cong$$

$\{ h \in \mathrm{END}(A) \;\exists\, n \in \mathbb{Z}$ TEL QUE $h(x) = nx \}$

<u>CLAIM</u> $h = n$

$(h - n)(x) = 0 \qquad x \in \mathrm{KER}(h-n)$

A EST SIMPLE $\Rightarrow$ $h-n$ EST SOIT ZERO SOIT UNE ISOGENIE.

x PAS DE TORSION $\Rightarrow$ $|\mathrm{KER}(h-n)|$ [illegible]

DONC $h-n=0$. $\blacksquare$