SURCONVERGENCE DU CRISTAL DE DIEUDONNÉ D'UN SCHÉMA SEMI-ABÉLIEN.

---

1. COHOMOLOGIES P-ADIQUES
2. SYSTÈMES LOCAUX "
3. THÉORÈME.

---

1. K CORPS PARFAIT

$\mathrm{car}(K) = p > 0$ $\quad \ell \neq p$ PREMIER

X/K VAR LISSE, $F : X \to X$ FROBENIUS ABSOLUE.

$W(K)$ VECTEURS DE WITT

L = CORPS DES FRACTIONS DE $W(K)$.

• $\ell \neq p$ $\quad H^i_{\acute{e}t}(X_{\bar{K}}, \mathbb{Q}_\ell) \circlearrowleft \pi_1(K)$

$\mathbb{Q}_\ell$ - ESPACE VECTORIEL
DE DIMENSION FINIE

__EX__ · SI X VAR. ABÉLIENNE

$$H^1(X_{\bar{k}}, \mathbb{Q}_\ell) \simeq V_\ell(X)^\vee$$
$$V_\ell(X) = \mathbb{Q}_\ell \otimes \left(\varprojlim X[\ell^n](\bar{k})\right)$$

ET $X \xrightarrow{m} X \rightsquigarrow$
$$\begin{array}{c} H^1(X_{\bar{k}}, \mathbb{Q}_\ell) \\ \downarrow m \\ H^1(X_{\bar{k}}, \mathbb{Q}_\ell) \end{array}$$

__EX__ SI X SEMI-ABÉLIENNE

$$0 \to \mathbb{G}_m \to X \to A \to 0$$

MÊME DESCRIPTION.

SENS : IL N'Y A PAS UNE BONNE THÉORIE COHOMOLOGIQUE À COEF DANS $\mathbb{Q}_p$

GROTHENDIECK – BERTHELOT :

$H^i_{cris}(X)$ L - ESPACE VECTORIEL. + FROBENIUS

SI $X = \mathfrak{X} \times_{W(k)} k$ $\quad \mathfrak{X} \downarrow W(k)$ LISSE

ALORS $H^i_{cris}(X)$ = COHOMOLOGIE DE DE RHAM DE

$\mathfrak{X}_\eta$ ← FIBRE GÉNÉRIQUE DE RAYNAUD (OGUS-BERTHELOT)

EX

- SI X PROPRE ALORS

$$H^1_{CRIS}(X) = H^1_{DR}(\mathcal{X}_L) \quad (\text{GAGA})$$

(EN GÉNÉRAL DÛ DÉMONSTRATION FACILE)

- X VAR ABÉLIENNE

$$X[p^\infty]$$

$$p\text{-DIV}(k) \underset{\mathbb{D}}{\overset{\text{DIEUDONNÉ}}{\simeq}} W(k)\text{-MODULE LIBRE} + F + V$$

$$H^1_{CRIS}(X) = \mathbb{D}(X[p^\infty]) \otimes \mathbb{Q}_p$$

GROTHENDIECK-MESSING

• $X = \mathbb{A}^1$ $\qquad \mathbb{A}^1_{\eta}$ = DISQUE FERMÉ RIGIDE

$\{\sum a_n x^i \,,\, |a_n| \to 0\}$ [redacted]

$$\begin{array}{c} \| \\ L\{x\} \xrightarrow{\nabla} L\{x\}\,dx \end{array}$$

$$H^1_{dR}(X) = \frac{L\{x\}dx}{\mathrm{Im}(\nabla)}$$ EST GROS

$$\left(\begin{array}{ll} f = \sum a_n x^n & |a_n| \to 0 \\ \\ \int f = \sum \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} & \left|\frac{a_n}{n+1}\right| \to 0 \end{array} \right)$$

Cohomologie rigide (Monsky-Washnitzer, Berthelot)

$H^i_{rig}(X)$ — espace vectoriel sur L de dimension finie + Frob.

<u>Ex</u> : si $X = \mathbb{A}^1$

$$L\{x\}^\dagger \xrightarrow{d} L\{x\}^\dagger dx$$

$$\| $$

$$\left\{ \sum a_n x^n \;\middle|\; \exists c > 1 \mid \lim_{n \to +\infty} |a_n| c^n \to 0 \right\}$$

fonction

← sur convergentes

$$H^i_{rig}(X) \longrightarrow H^i_{cris}(X) \text{ iso}$$

si X est propre.

• X VAR SEMIABÉLIANO

$$\mathbb{Q} \otimes \mathrm{ID}(X[p^\infty]) \cong H^1_{NA}(X)$$

ANNOTATA
BAMBINI VIACO.

THM BAAK (A.)

$$H^1_{NA}(X) = \left\{ w \in H^1_{CRIS}(X) \;\; [m]^* w = m w \right\}$$

$\int \frac{1}{x^{p-1}} =$

EG S^1 $X = \mathbb{G}_m$

$$[-1]^* \frac{1}{x} dx = -\frac{1}{x} dx \,/\, [-1]^* \frac{1}{x^{p+1}} dx = -x^{p-1} dx$$

② SYSTÈMES LOCAUX.

si $\ell \neq p$

$$LS(X, \mathbb{Q}_\ell) \cong Rep_{\mathbb{Q}_\ell}(\pi_1(X)).$$

- POUR $\ell = p$ IL Y A DEUX ANALOGUES (CREW - BERTHELOT)

$$\begin{array}{ccc} F\text{-}Iso(X) & \xleftarrow{\ \phi\ } & F\text{-}Iso^{\dagger}(X) \\ \text{CRISTAUX} & & \text{CRISTAUX} \\ \text{(CONVERGENT)} & & \text{SURCONVERGENTS} \end{array}$$

- PLEINEMENT FIDÈLE (KEDLAYA)
- ÉQUIVALENCE SI X PROPRE
- PAS FERMÉ POUR SUBOBJECT.

__DÉF__ $M \in F\text{-}Iso(X)$ EST SURCONVERGENT SI EST DANS L'IMAGE

OU $\mathbb{Q}$

<u>EX</u> $\bullet\ X = \mathbb{A}^1$

$$F\text{-}\mathrm{Iso}(X) = \left\{ (M, F) \;\middle|\; \begin{array}{l} M \text{ EST MODULE AVEC} \\ \text{CONNEXION INTÉGRABLE} \\ \text{SUR } L\{x\} \\ F : F^*M \longrightarrow M \end{array} \right\}$$

$$F\text{-}\mathrm{Iso}^{\dagger}(X) = \left\{ (M, F) \;\; \begin{array}{l} \bullet\ M \quad \text{''} \quad \text{''} \\ \quad \text{SUR } L\{x\}^{\dagger} \\ \bullet\ F^*M \longrightarrow M \end{array} \right\}$$

<u>EX</u> $\bullet\ A/X$ SCHÉMA ABÉLIENS

$$H^i_{\mathrm{cris}}(A/X) \in F\text{-}\mathrm{Iso}(X)$$

$$
\begin{tikzcd}
p\text{-}\mathrm{Div}(X) \arrow[r, "\mathbb{D}"] \arrow[d] & F\text{-}\mathrm{Iso}(X) \\
H^1_{\mathrm{cris}}(A/X) = \mathbb{D}(A[p^\infty]) &
\end{tikzcd}
$$

Berthelot-Breen-Messing

Étesse : $H^1_{\mathrm{cris}}(A/X)$ est surconvergent si A/X est ordinaire. (Donc $\mathbb{D}(A[p^\infty])$ est sur)

$$0 \to A[p^\infty]^0 \to A[p^\infty] \to A[p^\infty]^{\text{ét}} \to 0$$

$\mathbb{D}(A[p^\infty]^{\text{ét}})$ est presque jamais surconvergents.

- $H^1_{\mathrm{cris}}(A/X)^\dagger$ est semisimple dans $F\text{-}\mathrm{Iso}(X)^\dagger$

THM (A.)

G/X $\qquad 0 \to \mathbb{G}_m \to G \to A \to 0$

$\mathbb{D}(G[p^\infty])$ EST SURCONVERGENT.

③ PROUVÉ

$\mathbb{D}(A[p^\infty]) \overset{①}{\simeq} H^1_{cris}(A/X)$ ② EST SURCONVERG.

⚠ $H^1(G/X) \notin F\text{-}\mathrm{ISO}(X)$ $\quad G$

$G \rightsquigarrow$ ESPAÇO TOTAL DE $-\{0\}$
$L \in \mathrm{Pic}(A)$

$\mathrm{Spec}\left(\bigoplus_{i} L^i\right)$

$\overline{G} \rightsquigarrow$ ESPAÇO TOTAL DO
$\mathrm{Proj}(L \oplus \mathcal{O}_A)$

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, phantom, "\subseteq"] \arrow[dr] & \bar{G} \arrow[d] \\ & X \end{tikzcd}$$

compactification équivariante où $\bar{G} - G$ est diviseur à croisement normal.

$$H^1_{\mathrm{logcris}}(\bar{G}/X) \in F\text{-Iso}(X)$$

$\boxed{A}$ $H^1_{\mathrm{logcris}}(\bar{G}/X)$ est surconvergent.

$\boxed{B}$ $H^1_{\mathrm{logcris}}(\bar{G}/X) \cong \mathbb{D}(G[p^\infty])$

$\boxed{B}$ $\mathbb{D}(G[p^\infty])$ est défini en utilisant $G \times G \xrightarrow{m} G$

$\nexists\ \bar{G} \times \bar{G} \longrightarrow \bar{G}$

$$H^1_{\mathrm{conn\,cns}}(\bar{G}/X) \longrightarrow H^1_{\mathrm{cns}}(G/X)$$

<u>THM</u>

$$- H^1_{\mathrm{conn\,cns}}(\bar{G}/X) \qquad\qquad G\times G \xrightarrow{p_1,\,p_2,\,m} G$$

$$\subseteq$$

$$\mathrm{Ker}\left(H^1_{\mathrm{cns}}(G/X) \xrightarrow{m^* - p_1^* - p_2^*} H^1\left(G\times G / X\right)\right)$$

$$\alpha \longmapsto m^*\alpha - p_1^*\alpha - p_2^*\alpha = 0$$

$$[2]^*\alpha = \Delta^* m^* \alpha = \Delta^*(p_1^*\alpha + p_2^*\alpha)$$

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\Delta"] \arrow[rr, bend right, "2"'] & G\times G \arrow[r, "m"] & G \end{tikzcd} \qquad\qquad \begin{matrix} \shortparallel \\ 2\alpha. \end{matrix}$$

$$\mathbb{D}(G[p^\infty])$$

C'est quoi $H^1_{crys}(G/X)$?

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[d] & \mathcal{O}_U \arrow[l] \arrow[r] & G_T \arrow[d, shift left] \\
X \arrow[d] \arrow[r, phantom, "\cong"] & U \arrow[r] & T \arrow[u, shift left, "\text{immersion nilpotente.}"'] \\
K & &
\end{tikzcd}$$

quotient

$$H^1_{crys}(G/X)\left(\begin{smallmatrix} U \hookrightarrow T \\ \downarrow \\ X \end{smallmatrix}\right)$$

$$\|$$

$$H^1_{dR}(G_T/T).$$

C'est quoi $H^1_{dR}(G_T/T)$?

$$h.\mathcal{O}_{G_T} \xrightarrow{d} h.\Omega^1_{G_T/T}$$

C'EST QUOI $h.\mathcal{O}_{a_T}$?

<u>PROPOSITION</u> $T = \mathrm{Spec}(R)$, LOCAL.

$$h.\mathcal{O}_{a_T} \subseteq h.\mathcal{O}_{\mathbb{G}_m} = R[x, x^{-1}]$$

SOIT $\forall m \in \mathbb{Z}$ $I_m \subseteq R$ L'INTERSECTION DES IDÉALS I TELS QUE $L^m_{R/I} \in \mathrm{Pic}(A_{R/I})$ EST TRIVIAL.

ALORS

$$h.\mathcal{O}_{a_T} = \left\{ \sum r_i x^i \;\middle|\; r_i \in \mathrm{Ann}(I_i) \right\}$$

<u>EX</u> . $R = K[T]/T^2$

$A_0 \subseteq A$
$\downarrow \quad \downarrow$
$K \to R$

$L \notin \mathcal{O}_{A}$.

• Si $L_a \neq \mathcal{O}_{X_a}$ $h.\mathcal{O}_a = R$

• Si $L_a = \mathcal{O}_{A_a}$

$$h.\mathcal{O}_a = \left\{ \sum r_n x^n \;\; \& \;\; T = r_n, \; n \neq 0 \right\}$$

• $A = E$ corps résiduel

$H^q(X, \mathcal{L})$ n'est pas plat.

(car $H^q(X, \mathcal{L}) \not\twoheadrightarrow H^q(X_a, L_a)$

$$H^q(X_a, L_a) \simeq K$$

$$K \otimes H^q(X, L) \simeq K$$

$$H^q(X_a, L_a) = K$$

$$H^q(X, L) \simeq \frac{K(T)}{T}$$

$$H^q(X, L) = \{H^1(X, L^\vee)\}^\vee$$

$$\begin{array}{c} \| \\ \left(\dfrac{K(t)}{(t)}\right)^\vee = \mathrm{Ann}(\tau) \\ \qquad\qquad\quad \| \\ \qquad\qquad\quad \tau \end{array}$$