Congettura di Tate per varietà abeliane

Emiliano Ambrosi

Università degli studi di Milano

19 Luglio 2016

Introduzione

- A varietà proiettiva su un campo k, $char(k) = p \geq 0$, $l \neq p$ un numero primo.
- $\Gamma_k = Gal(k^{sep}, k)$
- $H^i(A_{\overline{k}}, \mathbb{Q}_l)$ coomologia l-adica
- Γ_k agisce in modo continuo su $H^i(A_{\overline{k}}, \mathbb{Q}_l)$

Domanda

Quante informazioni possiamo ottenere su A conoscendo la Γ_k rappresentazione $H^i(A_{\overline{k}}, \mathbb{Q}_l)$?

Se A è una varietà abeliana g dimensionale e $i = 1$, abbiamo una rappresentazione concreta della coomologia.

- $[n]$: $A \to A$ moltiplicazione per $n \in \mathbb{N}$
- $[n]$ è un'isogenia e se $p \nmid n$ è etale
- $A[l^n](\overline{k}) := ker([l^n])(\overline{k}) \simeq (\frac{\mathbb{Z}}{l^n\mathbb{Z}})^{2g}$
- $T_l(A) := \varprojlim A[l^n](\overline{k}) \simeq \mathbb{Z}_l^{2g}$, modulo di Tate.
- Γ_k agisce in modo continuo su $V_l(A) := T_l(A) \otimes \mathbb{Q}_l$
- $V_l(A) \simeq H^1(A_{\overline{k}}, \mathbb{Q}_l)'$ come rappresentazioni di Γ_k
- V_l è un funtore e abbiamo quindi una mappa (iniettiva) $\psi_{A,B} : Hom(A, B) \otimes \mathbb{Q}_l \to Hom_{\Gamma_k}(V_l(A), V_l(B))$

Riformulazione

Quante informazioni possiamo ottenere su A conoscendo la Γ_k rappresentazione $V_l(A)$?

Congettura di Tate

Teorema (Congettura di Tate per le varietà abeliane)

Se k è finitamente generato allora:

- $\psi_{A,B}$ *è biettiva*
- $V_l(A)$ *è una rappresentazione semisemplice*

E' stato necessario aspettare circa vent'anni per la dimostrazione.

- campi finiti (Tate '66)
- $char(k) > 2$ (Zarhin '73, Mori '77)
- $char(k) = 0$ (Faltings '83)

Perchè campo finitamente generato

- se il teorema è vero su un certo campo k allora si ha che $A \sim B$ se e solo se $V_l(A) \simeq V_l(B)$ come rappresentazioni
- Come $\mathbb{Q}_l$ moduli $V_l(A) \simeq V_l(B)$ se e solo $dim(A) = dim(B)$, quindi tutte le informazioni sono contenute nell'azione di Γ_k.
- se $k = \overline{k}$ allora $V_l(A) \simeq V_l(B)$ come rappresentazioni di $\Gamma_k = 0$ e quindi se il teorema fosse vero $A \sim B$ se e solo se $dim(A) = dim(B)$ il che è chiaramente assurdo.
- Questo mostra che l'ipotesi finitamente generato è necessaria in quanto abbiamo bisogno di un gruppo di Galois "grande"

Alcune applicazioni non banali

Teorema (Classificazione di Honda-Tate)

Esiste una biezione fra le classi di isogenia di varietà abeliane semplici su $\mathbb{F}_q$ *e interi algebrici, a meno di coniugio, tali che tutti i suoi coniugati hanno valore assoluto complesso* $q^{1/2}$

Teorema (Congettura di Mordell)

Una curva proiettiva liscia di genere maggiore di 2 *su un campo di numeri ha un numero finito di punti razionali*

Finitezza di classi di isomorfismo

Teorema (Tate e Zarhin)

La congettura di Tate è vera su un campo k se una delle seguenti condizioni è soddisfatta:
1)Esistono solo un numero di finito di classi di isomorfismo di varietà abeliane della stessa dimensione con una polarizzazione di grado fissato
2)Esistono solo un numero di finito di classi di isomorfismo di varietà abeliane in una classe di isogenia con una polarizzazione di grado fissato
3)Per ogni sottogruppo l-divisibile $G = \{G_n\}$ di $A[l^\infty]$ tale che $B_n = \frac{A}{G_n}$ ha una polarizzazione di grado fissato indipendente da n, i B_n cadono in un numero finito di classi di isomorfismo

Campi finiti

Usando il teorema precedente la congettura di Tate sui campi finiti è una facile conseguenza di due teoremi generali di geometria algebrica.

Teorema

Per ogni $g, d \in \mathbb{N}$ *esiste un* $n = n(g, d) \in \mathbb{N}$ *e un* $f = f(g, d) \in \mathbb{Q}[x]$ *tale che ogni varietà abeliana di dimensione* g *con una polarizzazione di grado* d *si immerge in* $\mathbb{P}_k^n$ *con polinomio di Hilbert* f

Teorema

I sottoschemi chiusi di $\mathbb{P}_k^n$ *con polinomio di Hilbert* f *sono in biezione con i* k *punti di un sottoschema di* $\mathbb{P}_k^m$ *per qualche* $m = m(n, f)$

Dato che k è finito, $\mathbb{P}_k^m$ ha un numero finito di punti razionali e questo conclude!

Campi globali di caratteristica positiva

Teorema (altezza)

Se k è un campo globale (estensione finita di $\mathbb{Q}$ o di $\mathbb{F}_q(t)$) esiste una funzione, l'altezza,

$$h : \mathbb{P}^n(\overline{k}) \to \mathbb{R}_{>0}$$

tale che esistono solo un numero finito di punti in $\mathbb{P}^n(\overline{k})$ di grado e altezza limitati.

Definiamo M(d) come il seguente insieme:

$$\left\{ \begin{array}{c} (A, \lambda) \text{ dove A è una varietà abeliana su } \overline{k} \text{ polarizzata da } \lambda, \\ \lambda \text{ è data da un divisore simmetrico separabile e } A[4] \subseteq ker(\lambda) \\ deg(\lambda) = d \text{ e "delta structure"} \end{array} \right\}$$

Teorema (Mumford 66)

Se k è un campo, $char(k) \neq 2$ esiste un'iniezione

$$I : \frac{M(d)}{\sim} \to \mathbb{P}^n(\overline{k})$$

dove $\sim$ indica la relazione di isomorfismo su $\overline{k}$ come varietà abeliane polarizzate

Teorema (Zarhin)

Se k è un campo globale di caratteristica positiva e $A, B \in M(d)$ sono isogene, allora

$$h(I(A, \lambda_A)) = h(I(B, \lambda_B))$$

$\Rightarrow$ congettura di Tate su campi globali di caratteristica positiva.

Campi di caratteristica positiva

Teorema (Mori)

Sia X una varietà quasi proiettiva irriducibile normale di dimensione maggiore di 2 su un campo di caratteristica $p > 0$ e A uno schema abeliano su X. Se la congettura di Tate vale su tutti i punti diversi di X da quello generico allora vale anche per il punto generico.

Campi di numeri

La dimostrazione segue lo stesso percorso della dimostrazione per i campi globali di caratteristica p. La difficoltà è che non si ha più l'uguaglianza delle altezze, in quanto nella dimostrazione veniva usato il fatto che tutte le valutazioni in caratteristica positiva sono non archimedee.
Per risolvere questo problema Faltings introduce un'altra altezza, l'altezza di Faltings, dimostra che questa altezza è limitata nelle famiglie che appaiono nel punto tre del teorema e infine compara le due altezze mostrando come la limitatezza dell'una è equivalente all'altezza dell'altra.

GRAZIE PER L’ATTENZIONE